Задание Д2. Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения *A* внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис. 1а).

Найти скорость шарика в положениях *B, C, D* и *E,* давление шарика на стенку трубки в положении *C,* а также дополнительный указанный неизвестный параметр. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь.

Дано: m = 0,5 кг; v_A = 12 м/с; t_1 = 1,0 с; R = 2,0 м; f = 0,2; α = 45°; β = 60°; h_0 = 0 м; c = 250 Н/м.

Определить v_B, v_C, v_D, v_E, N_C и h.

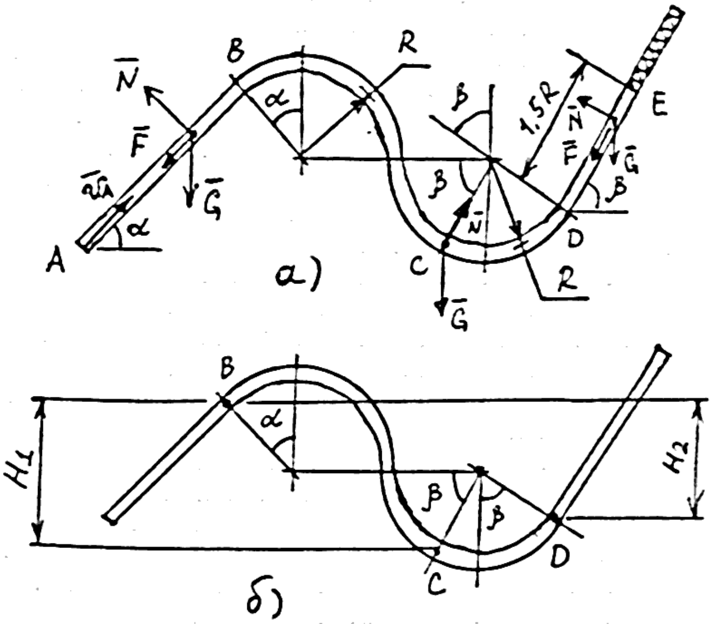

Рис. 1

Решение. Скорость шарика в положении *B* найдем, применив на участке *AB* теорему об изменении количества движения материальной точки (рис. 1а):

$$mv_{Bx} - mv_{Ax} = \Sigma S_{ix}.$$

К точке приложены сила тяжести $\vec{G}$, реакция стенки трубы $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}$:

$$F = fN = fG\cos\alpha.$$

Так как

$$v_{Ax} = v_A, \quad v_{Bx} = v_B, \quad \Sigma S_{ix} = (-G\sin\alpha - F)t_1 = (-mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha)t_1,$$

то

$$mv_B - mv_A = (-mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha)t_1,$$

откуда

$$v_B = v_A + (-g\sin\alpha - fg\cos\alpha)t_1.$$

Вычисляем числовое значение

$v_B = 12 + (-9{,}8 \cdot \sin 45° - 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 45°) \cdot 1{,}0 = 3{,}68$ м/с.

Для определения v_C и v_D применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках BC и BD траектории происходит под действием силы тяжести G (силы трения на криволинейных участках не учитываем), расстояния H_1 и H_2 показаны на рис. 1б.

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = \Sigma A_i = GH_1 = mg(R\cos\alpha + R\sin\beta);$$

$$v_C^2 = v_B^2 + 2gR(\cos\alpha + \sin\beta);$$

$$v_C^2 = 3{,}68^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}0 \cdot (\cos 45° + \sin 60°) = 75{,}24 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$v_C = \sqrt{75{,}24} = 8{,}67 \text{ м/с};$$

$$\frac{mv_D^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = \Sigma A_i = GH_2 = mg(R\cos\alpha + R\cos\beta);$$

$$v_D^2 = v_B^2 + 2gR(\cos\alpha + \cos\beta);$$

$$v_D^2 = 3{,}68^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}0 \cdot (\cos 45° + \cos 60°) = 60{,}89 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$v_D = \sqrt{60{,}89} = 7{,}80 \text{ м/с}.$$

Определяем давление шарика на стенку канала в положении C с помощью естественного уравнения движения:

$$\frac{mv_C^2}{R} = N - G\sin\beta.$$

Отсюда

$$N = \frac{mv_C^2}{R} + mg\sin\beta,$$

или

$$N = \frac{0{,}5 \cdot 8{,}67^2}{2{,}0} + 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 60° = 23{,}0 \text{ Н}.$$

Сила N – это сила с которой канал действует на шарик, следовательно, искомая сила, с которой шарик действует на канал, равна $N_C = N = 23{,}0$ Н.

Для определения v_E применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участке DE траектории происходит под действием сил G, N, F (рис. 1а):

$$\frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_D^2}{2} = \Sigma A_i = -G \cdot DE\sin\beta - F \cdot DE = -mg(\sin\beta + f\cos\beta) \cdot 1{,}5R;$$

$$v_E^2 = v_D^2 - 2g(\sin\beta + f\cos\beta) \cdot 1{,}5R;$$

$$v_E^2 = 7{,}80^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot (\sin 60° + 0{,}2 \cdot \cos 60°) \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}0 = 4{,}091 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$v_E = \sqrt{4{,}091} = 2{,}02 \text{ м/с}.$$

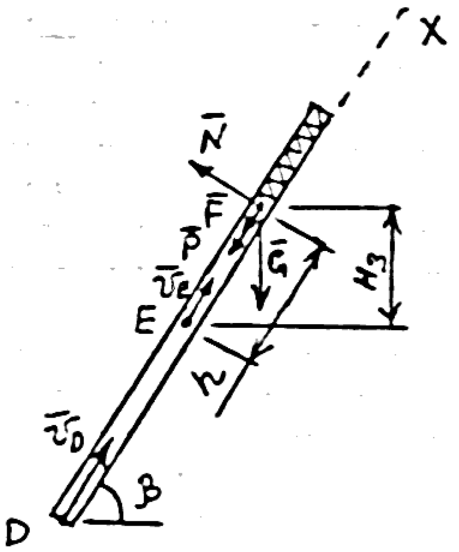

Рис. 2

Для определения максимального сжатия h пружины воспользуемся на участке DE теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки (см. рис. 2):

$$\frac{mv_O^2}{2}-\frac{mv_E^2}{2}=\Sigma A_i=\frac{c}{2}(h_0^2-h^2)-GH_3-Fh.$$

Учитывая, что $v_O = 0$, $h_0 = 0$ и $H_3 = h \sin \beta$, получаем

$$\frac{c}{2}h^2+mg(\sin\beta+f\cos\beta)h-\frac{mv_E^2}{2}=0,$$

или

$$\frac{250}{2}h^2+0{,}5\cdot 9{,}8\cdot(\sin 60°+0{,}2\cdot\cos 60°)h-\frac{0{,}5\cdot 2{,}02^2}{2}=0,$$

$$125h^2+4{,}734h-1{,}023=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно h, получим

$$h=\frac{-4{,}734\pm\sqrt{4{,}734^2-4\cdot 125\cdot(-1{,}023)}}{2\cdot 125}=\frac{-4{,}734\pm 23{,}11}{250}\text{ м.}$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения:

$$h=\frac{-4{,}734+23{,}11}{250}=0{,}0735\text{ м.}$$

Ответ: $v_B=3{,}68$ м/с; $v_C=8{,}67$ м/с; $v_D=7{,}80$ м/с; $v_E=2{,}02$ м/с; $N_C=23{,}0$ Н; $h=0{,}0735$ м.