1

Основы дифференциального исчисления . Понятие производной.

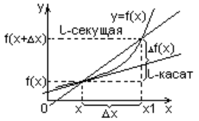
ΔX=X1-X – приращение аргумента.
Δf(X)=f(X+ΔX)-f(X) – приращение функции. **Пример:**

Определение: Произв. функ. f(x) в точке X наз. предел отношения приращения функ. к приращению аргум., когда последнее стремится к 0.

Геометрический смысл производной.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$(x^2)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=$$
$$=2x+0=2x$$



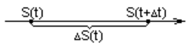
Ку.к. – угловой коэф. касательной.
Ксек – угловой коэф. секущей.

$$K_{сек}=tg\varphi_{cek}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$K_{у.к.}=\lim_{\Delta x\to 0}K_{сек}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

Таким образом угловой коэффициент касательной совпадает со значение производной в данной точке.
Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке M0 (x0,y0) имеет вид: $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Физический смысл производной.
S(t) – путь за данное время.



ΔS(t) – приращение пути.
ΔS(t)/ Δt –средняя скорость на участке.
мгновен. скорость на участке:

$$\lim_{\Delta t\to 0}=\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}U_{cp}(t)=U(t)$$

произв. пути от скорости: S'(t)=U(t)

<u>Теорема</u>: Связь между непрерывной и дифференцируемой функцией.
Функция наз. диферинцируемой если она имеет производную.
Если функция диффер. в точке x, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство:

$$\exists f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x)=\alpha(\Delta x)\Delta x,\alpha\to 0$$
$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0+0=0\Rightarrow f(x)-непрерывна$$

2

Правила дифференцирования

Теорема: Если f(x) и g(x) дифферен. в точке x, то:

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$
$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$
$$\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Доказательство 2-го правила.

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)\right)-f(x)g(x+\Delta x)+}{\Delta x}$$
$$\frac{+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot$$
$$\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

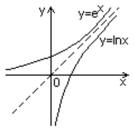
Теорема о произв. сложной функции.
Если y(x)=f(u(x)) и существует f'(u) и u'(x), то существует y'(x)=f(u(x))u'(x).

Доказательство:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(u(x))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}=\left]\begin{matrix}\Delta x\to 0\\ \Delta u\to 0\end{matrix}\right[=$$
$$=f'(u)\cdot u'(x)+0\cdot u'(x)+f'(u)\cdot u'(x)$$

Рассмотрим f(x) в задан. промеж.: [a,b].
g(y): [f(a),f(b)] – наз. обратной к f(x), если g(f(x))=x, для любого ∀ X ∈[a,b]
f(g(y))=y, для любого y ∈[f(a),f(b)]
y=sin x [-π/2, π/2], тогда
x=arcsin y, y∈[1,1]
sin arcsin y = y;
arcsin * sin x=x

$$y=e^x,x\in(-\infty;+\infty)$$
$$x=\ln y,y\in(0;+\infty)$$
$$\ln e^x=x;e^{\ln y}=y$$



Теорема о произв. обратной функции.

$$Если\_\exists y'(x)\neq 0,то\exists x'(y)=\frac{1}{y'(x)}$$

Доказательство:

$$\frac{1}{y'(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1/\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=x'(y)$$

Таблица производных:

$$(c)'=0;(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1};x'=1;(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(a^x)'=a^x\ln a,a>0,a\neq 1;(e^x)'e^x$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},a>0,a\neq 1,(\ln x)'=\frac{1}{x}$$
$$(\sin x)'=\cos x;(\cos x)'=-\sin x$$
$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2};(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

mozgstudent.ru
Центр помощи студентам ТулГУ

3

Таблица производных:

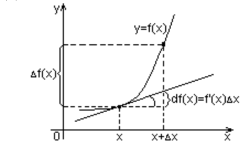
$$(c)'=0;(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1};x'=1;(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(a^x)'=a^x\ln a,a>0,a\neq 1;(e^x)'e^x$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},a>0,a\neq 1,(\ln x)'=\frac{1}{x}$$
$$(\sin x)'=\cos x;(\cos x)'=-\sin x$$
$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2};(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

Доказательство:

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=$$
$$=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$
$$(\cos x)'=(\sin(\frac{\pi}{2}-x))'=\left]\begin{matrix}f=\sin u;u=\pi/2-x\\ f'(u)=\cos u;u'=0-1\end{matrix}\right[=$$
$$=\cos u(-1)=-\cos(\frac{\pi}{2}-x)=-\sin x$$
$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^1=\frac{(\sin)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1/1}{\cos^2 y}=\cos^2 y=$$
$$=\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y+\cos^2 y}=\frac{1}{tg^2 y+1}=\frac{1}{1+x^2}$$

Дифференциал функции.

Определение: Если X независимая переменная, то дифференциал функции f(x) наз. f'(x)Δx=u обозначают df(x).



$$f'(x)=tg\varphi$$
$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$$
$$\Delta f(x)=df(x)+\alpha(\Delta x)\Delta x$$
$$\Delta f(x)\approx df(x)$$

Теорема об инвариантной форме первого дифференциала.
df(x)=f'(x)dx

Доказательство:

1).
$$\left.\begin{matrix}df(x)=f'(x)\Delta x\\ dx=x'\Delta x=\Delta x\end{matrix}\right\}\Rightarrow df(x)=f'(x)dx$$

2).
$$x=\varphi(t)-зависимая\_переменная$$
$$df(x)=df(\varphi(t))=(f(\varphi(t)))'\Delta t=f'(\varphi(t))\cdot$$
$$\cdot\varphi'(t)\Delta t=f'(t)dx]dx=\varphi'(t)\Delta t[$$

mozgstudent.ru
Центр помощи студентам ТулГУ

4

Производная высших порядков.

Определение: Производная второго порядка называется производная производной данной функции:

$$f''(x)=(f'(x))'$$

Определение: Производная n-го порядка называется производной производной n-1-го порядка.

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$$

Пример:

$$(x^3)''=(3x^2)'=3\cdot 2x=6x$$

Используя метод математической индукции несложно показать, что:
1). n-ая производная обладает свойством линейности, т.е.:

$$(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$$
$$(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$$

2). $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$

3). $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2})$

4). $(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)x^{\mu-n}$

5). $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$

6). $(e^x)^{(n)}=e^x$

Дифференцирование функций заданных параметрически.

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases};y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Пример 1:

$$пусть\begin{cases}x=t^2+t\\ y=t^3+2t^2\end{cases}тогда..y'(x)=\frac{(t^3+2t^2)'}{(t^2+t)'}=$$
$$=\frac{3t^2+4t}{2t+1}$$

возьмем t=1, тогда x=2, y=3; y'(2)=7/3

Пример 2:

$$y''(x)=(y'(x))_x^1=\frac{(y'(x))_t^1}{x'(t)}=\frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)_t^1}{x'(t)}=$$
$$=\frac{y''(t)\cdot x'(t)-y'(t)\cdot x''(t)}{(x'(t))^3}$$

mozgstudent.ru
Центр помощи студентам ТулГУ

5

Основные теоремы матим. анализа.

1. Теорема Ферма.

Если f(x) дифф. в точке x_0 и принимает в хтой точке наибольш. или наименьш. значение для некоторой окресности точки x_0, то f'(x)=0.

Доказательство:

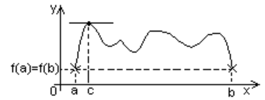
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

пусть $f(x_0)$ – наибольшая.

$$1)\_\Delta x<0;\frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)\leq 0}{\Delta x<0}\geq 0;\Rightarrow f'(x_0)\geq 0$$
$$2)\_\Delta x>0;\frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)\leq 0}{\Delta x>0}\leq 0;\Rightarrow f'(x_0)\leq 0$$
$$1,2)\_f'(x_0)=0$$

2.Теорема Ролля.

Если функция f(x) непрерывна на заданном промеж/ [a,b] деффер. на интервале (a,b) f(a)=f(b) то существует т. **c** из интерв. (a,b), такая, что f'(c)=0.



3. Теорема Коши.

Если f(x), g(x) удовл. трем условиям:
1). f(x), g(x) непрерыв. на промеж [a,b]
2). f(x), g(x) деффер. на интервале (a,b)
3). g'(x)≠0 на интер. (a,b), то сущ. т. **c**

$$c\in(a,b):\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

g(b)≠g(a) (неравны по теореме Ролля).

$$F(x)=\begin{vmatrix}f(x)&g(x)&1\\ f(b)&g(b)&1\\ f(a)&g(a)&1\end{vmatrix}=f(x)(g(b)-g(a))-$$
$$-g(x)(f(b)-f(a))+f(b)(g(a)-g(b))f(a)$$

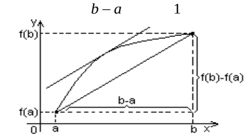
1). F(x) – непрерывна на [a,b]
2). F(x) – дефференцированна на (a,b)
3). F(a)=0 ; F(b)=0
по теореме Ролля сущ. c∈(a,b); F'(c)=0

$$F'(x)=(g(b)-g(a))f'(x)-(f(b)-f(a))g'(x)$$
$$F'(c)=0\Leftrightarrow(g(b)-g(a))f'(c)-(f(b)-f(a))g'(c)=0$$
$$(g(b)-g(a))f'(c)=(f(b)-f(a))g'(c)$$
$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

4.Теорема Лагранжа.

Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и дефференцирована на (a,b), то сущест. т. c(a,b), такая, что: f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).
Доказательство: применим т.Коши, взяв только g(x)=x, тогда g'(x)=1≠0.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1}$$



mozgstudent.ru
Центр помощи студентам ТулГУ

6

Правила Лопиталя. Раскрытие неопределенности.

Теорема: Если функция f(x), g(x) дефференцирована в окресности т. a, причем f(a)=g(a)=0 и существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\Rightarrow\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\left(\frac{0}{0}\right)$$

Доказательство:

Формула Тейлора.

Определение: многочлен Тейлора n-го порядка функции f(x) в точке x_0 назыв.

$$T_n(f(x),x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$
$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

Пример:

$$T_3(x^3,1)=?$$
$$f(x)=x^3;f(x_0)=1$$
$$f'(x)=3x^2;f'(x_0)=3$$
$$f''(x)=6x;f''(x_0)=6$$
$$f'''(x)=6;f'''(1)=6$$
$$T_3(x^3,1)=1+\frac{3}{1!}(x-1)+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3=$$
$$=1+3(x-1)+3(x-1)2+(x-1)^3$$

Определение: остаточным членам формулю Тейлора n-го порядка наз.:
$R_n(f(x),x_0)=f(x)-T_n(f(x),x_0)$

Теорема: Если функция F(x) (n+1) – дефферен. в окресности точки x_0, то для любого x из этой окресн. сущ. т. c(x_0, x)

$$R_n(f(x),x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

mozgstudent.ru
Центр помощи студентам ТулГУ

0

Правила дифференцирования.

$$c'=0(c=const);(u-v-w)'=u'-v'+w'$$
$$(uv)'=u'v+uv';(cv)'=cv'(c=const)$$
$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c};\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Производные степенных и тригонометрических функций.
Основные формулы:

$$(x^a)'=ax^{a-1};\left(\sqrt{x}\right)^1=\frac{1}{2\sqrt{x}};\left(\frac{1}{x}\right)^1=-\frac{1}{x^2};$$
$$x_x^1=1;(\sin x)'=\cos x;(\cos x)'=-\sin x;$$
$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Производная сложной функции.

$$(z^a)'=az^{a-1}\cdot z';\left(\sqrt{z}\right)^1=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot z';$$
$$(\sin z)'=\cos z\cdot z';(\cos z)'=-\sin z\cdot z';$$
$$(tgz)'=\frac{1}{\cos^2 z}\cdot z';(ctgz)'=-\frac{1}{\sin^2 z}\cdot z'$$

Производные показательных и логарифмических функций.
Основные формулы:

$$(a^x)'=a^x\ln a;(e^x)'=e^x;(\ln x)'=1/x$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

Если z=z(x) – дифференцируемая функция от x, то формулы имеют вид:

$$(a^z)'=a^z\cdot\ln a\cdot z';(e^z)'=e^z\cdot z'$$
$$(\log_a z)'=\frac{z'}{z\ln a};(\ln z)'=\frac{z'}{z}$$

Производные обратных тригонометрических функций.
Основные формулы:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2};(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

Для сложных функций:

$$(\arcsin z)'=\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}};(\arccos x)'=-\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$(arctgz)'=\frac{z'}{1+z^2};(arcctgz)'=-\frac{z'}{1+z^2}$$

$$V_{цилиндра}=\pi r^2\cdot h$$
$$V_{конуса}=\tfrac{1}{3}\cdot S_{осн.}\cdot h=\tfrac{1}{3}\pi r^2\cdot h$$

mozgstudent.ru
Центр помощи студентам ТулГУ

7

Аналитические признаки поведения функции.

<u>Теорема</u>: Критерий постоянства фун. Функция f(x)=const на промежутке [a,b], тогда, когда f'(x)=0 на интервале (a,b).

<u>Док-во</u>: f(x)=c => f'(x)=c'=0 возьмем ∀x∈[a,b] и применим т. Лангранжа f(x) [a,b] по т. Лангранжа f(x)-f(a)=f'(c)(x-a); c∈(a,x); f(x)-f(a)=0; f(x)=f(a) для любого x => f(x)=const.

<u>Теорема</u>: Достаточный признак возрастания функции. Если f'(x)>0, (a,b), то f(x) возрастает на [a,b].

<u>Док-во</u>:
возьмем x_1, x_2 ∈[a,b]: $x_1<x_2$ => $f(x_2)>f(x_1)$ применим т. Лангранжа f(x) на $[x_1,x_2]$ по этой теореме $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0$ => $f(x_2)>f(x_1)$.**Замечание:** данные условия не являются необходимыми.

<u>Теорема</u>: достаточный признак убывания функции. Если f'(x)<0 на (a,b), то f(x) убывает на [a,b].

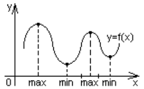
<u>Док-во 1</u>: подобно предыдущему.

<u>Док-во 2</u>: g(x)=-f(x),тогда g'(x)=-f'(x)>0 => g(x) - возрастает => f(x) – убывает.

Несложно показать, что если функция возрастает (убывает) на [a,b], то ее произв. не отрицат.(положит.) на (a,b). f(x) возрастает: [a,b]=>f'(x)⊇0 (a,b).

Признаки экстремума функций.

<u>Опред</u>: точка x_0 называется точкой max (min) если существ. такая окрестность данной точки, что в x_0 фун. принимает наибольшее (наименьшее) значение. Точка x0 наз. точкой экстремума, если эта точка max или min данной функции.



<u>Теорема</u>: Необходимый признак экстремума функции.
Если x_0 точка экстремума f(x), то :
1). Либо не существует $f'(x_0)$
2). Либо $f'(x_0)=0$

<u>Док-во</u>:
1). Не сущест. $f'(x_0)$
2). Сущест. $f'(x_0)$ - по т. Ферма $f'(x_0)=0$

Замечание: данные условия не являются достаточными.

$f(x)=x^3, тогда\_f'(0)=0$

8

Поиск наибольшего и наименьшего значения непрерывных функций на замкнутом промежутке.

$f(x)=3x^4-4x^3,[-1,2]$
$f'(x)=12x^3-12x^2,\ f'(x)=0;$
$12x^2(x-1)=0;\ x_1=0;\ x_2=1;$
$f(0)=0$
$f(1)=3\cdot1^4-4\cdot1^3=-1,\ наименьшее$
$f(-1)=7$
$f(2)=16,\ наибольшее$

<u>Теорема</u>: Первый достаточный признак экстремума функции.
Если f'(x)>0 на интервале (x_0-б,x_0) и f'(x)<0 на интервале (x_0,x_0+б) т.е. меняет знак с плюса на минус при переходе на точку x_0, т.е. x_0 – точка максимума f(x), а если же меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

<u>Доказательство</u>:

$1).f'(x)>0,(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f(x)-возвр.[x_0-\delta,x_0]$
$т.е.f(x_0)>f(x),\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$
$2).f'(x)<0,(x_0,x_0-\delta)\Rightarrow f(x)-убыв.[x_0,x_0-\delta]$
$т.е.f(x_0)>f(x),\forall x\in(x_0,x_0-\delta)$
$1,2).\Rightarrow x_0-точка\_максимума$

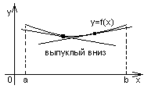
<u>Теорема</u>: Второй достаточный признак максимума функции.
Если f(x) имеет непрерывную вторую производную в окрестности точки x_0, и:
1). $f'(x_0)=0$ 2). $f''(x_0)<0$
то x0 точка максимума (аналогично, если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка минимума)

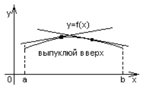
<u>Док-во</u>: Возьмем окрестность, где вторая производная сохраняет знак и запишем формулу Тейлора 1-го порядка для **x** из данной окрестности.

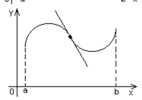
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$
$$+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,c\in(x_0,x)$$
$$\Rightarrow f(x_0)>f(x),для\_любого\_\forall x\neq x_0$$

Выпуклость графика функции.

<u>Опр</u>. График функции y=f(x) называется выпуклым вниз (вверх) если он расположен выше (ниже) любой касательной проведенной к графику функции на данном интервале.

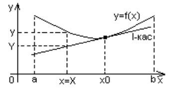






9

<u>Теорема</u>: Достаточный признак выпуклости графика функции вниз.
Если функция f(x) дважды дефференц. на нтервале (a,b) и ее вторая производн. f''(x)>0 на интервале (a,b), то график функции y=f(x) выпуклый вниз на интервале (a,b).



$$y=f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$$

Уравнение касательной:
$l_{кас}:Y-f(x_0)=f'(x_0)(X-x)$
$Y=f(x_0)+f'(x_0)(X-x)$
Возьмем X=x.Из первого вычтем второе
$\Rightarrow y-Y=\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2>0$
Поэтому y>Y следовательно график функции расположен выше касательной Аналогично, если f''(x)<0 на (a,b) то график функции y=f(x) - выпуклый вверх, на данном интервале.

Асимптоты.

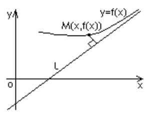
Опр. Часть графика называется бесконечной ветвью если при движении точки по этой части, расстояние между ей и началом координат стремится к бесконечности.

Опр. Прямая называется асимптотой бесконечной ветви графика функции, если при удалении точки от начала координат по этой ветви, расстояние до данной прямой стремится к нулю.

<u>Теорема 1</u>: x=a (вертикальная прямая) – является асимптотой для бесконечно вертикальной ветви графика функции y=f(x), тогда когда f(x)→∝, при x→a.

<u>Теорема 2</u>: Критерий существования наклонной асимптоты прямая y=kx+b является асимптотой для правой (левой) ветви графика функции тогда, когда существует предел при :
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b,(x\to-\infty)$

<u>Док-во</u>: Точка $M_0(x_0,y_0)$ и прямая L: Ax+By+Cz=0, то расстояние
$$d(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
Пусть y=kx+b асимптота => d(M,l)→0=> kx-f(x)+b→0 тогда f(x)-kx→b при x→+∝ существует предел: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$



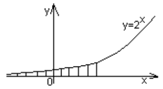
10

<u>Теорема</u>: Необходимый признак существования наклонной асимптоты. Если прямая l: y=kx+b – наклонная асимп. для правой наклонной ветви, то:
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},(x\to+\infty)$$

<u>Док-во:</u>
$\exists\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b,тогда$
$f(x)-kx-b;\_1/x\to0;\_(x\to+\infty)$
$(f(x)-kx-b)1/x\to0$
$\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\to0\Rightarrow\frac{f(x)}{x}-k\to0\Rightarrow\frac{f(x)}{x}\to k$

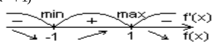
<u>Пример</u>:
$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ x=1 – верт. Асимптота, т.к. f(x)→∝, когда x→1
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x-1}=0$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1$$

<u>Вывод</u>:
y=0·y+1 – наклонная асимптота для левой и правой ветви.

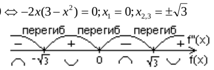


Примерная схема исследования графика функции.
1).Область определения.
2).Четность (нечетность), переодичность, точки пересечения и др.
3). Непрерывность, точки разрыва, вертикальные асимптоты.
4). Исследование на убывание (возвр.) в точках экстремума.
5). Исследование на выпуклость.
6). Построение графика функции.

<u>Пример</u>: $y=\frac{x}{x^2+1}$
1). (-∞,+∞)
2).не периодическая.
$$y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-y(x)$$
нечетная, если фун. не изменила знак, значит фун. нечетная y=0⇔x=0
3). непрерывная (-∞,+∞)
4).
$$y'=\frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2};y'(x)=0;1-x^2=0;x^2=1;x_{1,2}=\pm1$$



5).
$$y''=\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)'=\frac{(1-x^2)'(1+x^2)^2-(1-x^2((1+x^2)^2)'}{(1+x^2)^4}=$$
$$=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$
$$y''=0\Leftrightarrow-2x(3-x^2)=0;x_1=0;x_{2,3}=\pm\sqrt3$$



$y(-\sqrt3)=-\frac{\sqrt3}{4};y(0)=0;y(\sqrt3)=\frac{\sqrt3}{4}$
6).
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2+1}}{x}=0$$
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$
y=0·x+0;y=0 – наклонная асимптота.