## Задание Д1. Решение второй (основной) задачи динамики материальной точки

Тело, принимаемое за материальную точку, в течение $t_1$, с, спускается из положения $O$ в точку $A$ наклонной плоскости, составляющей угол $\beta$ с горизонтом. Длина участка $OA$ равна $l$, м; коэффициент трения скольжения тела по плоскости – $f$; начальная скорость тела – $v_0$, м/с. В точке $A$ тело, имея скорость $v_A$, покидает плоскость $OA$ и в течение времени $t_2$, с, совершает свободное падение, в конце которого, обладая уже скоростью $v_B$, встречается в точке $B$ с плоскостью $AC$, наклоненной под углом $\alpha$ к горизонту. Сопротивление воздуха не учитывается.

Дано: $l = 19{,}2$ м; $\beta = 15°$; $\alpha = 45°$; $f = 0{,}2$; $t_1 = 5{,}2$ с.

Определить $v_0$ и $h$.

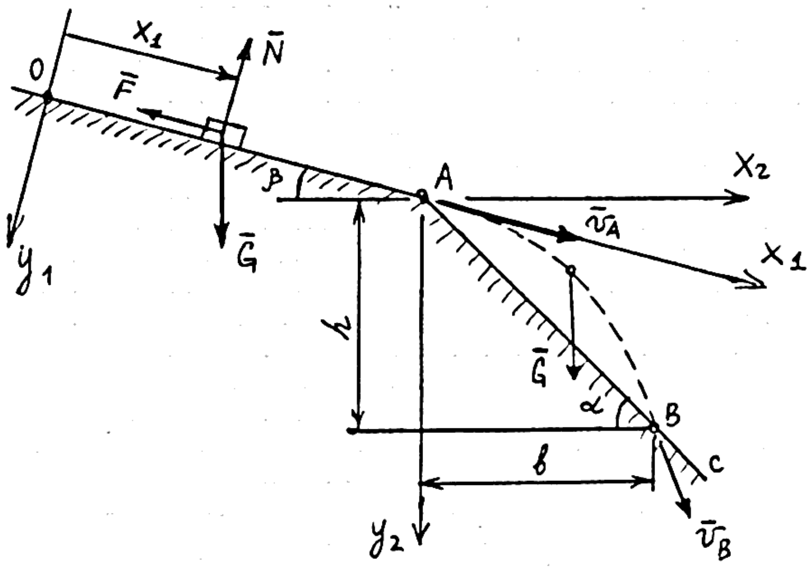


Рис. 1

*Решение.* Рассмотрим движение тела на участке $OA$. Принимая тело за материальную точку, покажем (рисунок 1) действующие на него силы: силу тяжести $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$. Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке $OA$:

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \qquad m\ddot{x}_1 = G\sin\beta - F.$$

Сила трения

$$F = fN$$

где

$$N = G\cos\beta$$

Таким образом

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\beta - fG\cos\beta$$

или

$$\ddot{x}_1 = g\sin\beta - fg\cos\beta.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin\beta - f\cos\beta)t + C_1;$$

$$x_1 = \frac{g}{2}(\sin\beta - f\cos\beta)t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = v_0$.

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \qquad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные

$$C_1 = v_0; \qquad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin\beta - f\cos\beta)t + v_0;$$

$$x_1 = \frac{g}{2}(\sin\beta - f\cos\beta)t^2 + v_0 t.$$

Для момента $t_1$, когда тело покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_A; \qquad x_1 = l,$$

т.е.

$$v_A = g(\sin\beta - f\cos\beta)t_1 + v_0;$$

$$l = \frac{g}{2}(\sin\beta - f\cos\beta)t_1^2 + v_0 t_1.$$

откуда

$$v_0 = \frac{l}{t_1} - \frac{g}{2}(\sin\beta - f\cos\beta)t_1,$$

т.е.

$$v_0 = \frac{19{,}2}{5{,}2} - \frac{9{,}8}{2}(\sin 15° - 0{,}2\cos 15°)\cdot 5{,}2 = 2{,}02 \text{ м/с},$$

$$v_A = 9{,}8(\sin 15° - 0{,}2\cos 15°)\cdot 5{,}2 + 2{,}02 = 5{,}36 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение тела от точки $A$ до точки $B$.

Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на тело, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x}_2 = 0; \qquad m\ddot{y}_2 = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$

$$x_{20} = 0; \qquad y_{20} = 0;$$

$$\dot{x}_{20} = v_A\cos\beta; \quad \dot{y}_{20} = v_A\sin\beta.$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\dot{x}_2 = C_3; \qquad \dot{y}_2 = gt + C_4;$$

$$x_2 = C_3 t + C_5; \qquad y_2 = \frac{g}{2}t^2 + C_4 t + C_6.$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$

$$\dot{x}_{20} = C_3; \qquad \dot{y}_{20} = C_4;$$
$$x_{20} = C_5; \qquad y_{20} = C_6.$$

Отсюда находим, что

$$C_3 = v_A \cos\beta; \quad C_4 = v_A \sin\beta;$$
$$C_5 = 0; \qquad C_6 = 0.$$

Получим следующие уравнения проекций скорости тела:

$$\dot{x}_2 = v_A \cos\beta; \qquad \dot{y}_2 = gt + v_A \sin\beta$$

и уравнения его движения

$$x_2 = v_A \cos\beta \cdot t; \qquad y_2 = \frac{g}{2} t^2 + v_A \sin\beta \cdot t$$

Через время $t_2$ тело попадает на плоскость $AC$ в точку $B$. Значит

$$x_B = v_A \cos\beta \cdot t_2, \; y_B = \frac{g}{2} t_2^2 + v_A \sin\beta \cdot t_2.$$

Учтём также, что

$$x_B = b, \; y_B = h, \; h = b \operatorname{tg}\alpha.$$

Откуда

$$\frac{g}{2} t_2 + v_A \sin\beta = v_A \cos\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

$$t_2 = \frac{2v_A}{g} (\cos\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha - \sin\beta),$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot 5{,}36}{9{,}8} (\cos 15° \cdot \operatorname{tg} 45° - \sin 15°) = 0{,}774 \text{ с.}$$

Находим искомый параметр

$$h = y_B = \frac{9{,}8}{2} \cdot 0{,}774^2 + 5{,}36 \cdot \sin 15° \cdot 0{,}774 = 4{,}01 \text{ м.}$$

Ответ: $v_0 = 2{,}02$ м/с; $h = 4{,}01$ м.